Preparaduría I

1.- Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de todos los reales positivos. Muestre que $\mathbb{R}^+$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma $\alpha \boxplus \beta = \alpha\beta$ y la multiplicación escalar $a \boxdot \alpha = \alpha^a, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad a \in \mathbb{R}$. Halle la dimensión de este espacio vectorial. Será $\mathbb{R}^+$ un espacio vectorial si, en cambio, la multiplicación escalar se define por $a \bullet \alpha = a^\alpha$?

2.- Determinar si cada uno de ss. es un espacio vectorial sobre el cuerpo indicado: $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$, el conjunto $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5}, a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ sobre $\mathbb{Q}$. En caso afirmativo, determinar la dimensión del espacio y dar una base.

3.- Demuestre que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un cuerpo si, y sólo si, p es primo.

4.- Sea $\mathbb{P}_n[x]$ el conjunto de polinomios a coeficientes reales de grado menor que n. Muestre que $\mathbb{P}_n[x]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y multiplicación escalar usuales para los polinomios. Dar una base para este espacio vectorial.

a) Si $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$, hallar las coordenadas de $f(x)$ con respecto a la base $\left\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^{n-1}\right\}$, donde a es un número real dado.

b) Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ sea

$$f_i = (x - a_1) \ldots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \ldots (x - a_n)$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reales distintos dos a dos, cualesquiera. Muestre que

$$\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$

también es una base de $\mathbb{P}_n[x]$.

c) Es $\mathbb{P}[x]$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? Una vez resuelta la parte a) de este ejercicio, compruebe que -naturalmente- las coordenadas coinciden con los coeficientes del desarrollo de Taylor de $f(x)$ alrededor de a.

5.- Compruebe que la multiplicación de matrices corresponde a la composición de transformaciones lineales. A qué transformación lineal corresponde la suma de matrices?

6.- Sea $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones continuas a valores reales sobre $\mathbb{R}$. Muestre que $\cos x$ y $\sin x$ son linealmente independientes y que el subespacio vectorial formado por estas funciones [esto es, $\operatorname{Span}\{\sin x, \cos x\} = \{a \sin x + b \cos x, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$] está contenido en el conjunto de soluciones a la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

7.- Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$.

a) Muestre que

$$\begin{array}{rccccc} e_1 = & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e_2 = & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ e_3 = & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ e_n = & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccccc} \epsilon_1 = & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \epsilon_2 = & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \epsilon_3 = & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \epsilon_n = & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{array}$$

forman dos bases de este espacio vectorial. Serán también bases para $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$? para $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$?

b) Hallar una matriz A tal que $A(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Si un vector tiene coordenadas $(1, 2, \dots, n)$ con respecto a la base $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$, cuáles son sus coordenadas con respecto a la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots \epsilon_n\}$?

c) Hallar $n+1$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{C}^n$.

8.- Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si el vector 0 está incluido entre $\{v_1, \dots, v_n\}$, entonces estos vectores son linealmente dependientes.

b) Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ son l.ind. y α_{r+1} no es combinación lineal de ellos, entonces $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r, \alpha_{r+1}$ son l.ind.

c) Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ son linealmente dependientes, entonces cada uno de ellos es combinación lineal de los demás.

d) Si β no es combinación lineal de $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$, entonces $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ son l. ind.

e) Si $V = \operatorname{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y si cada v_i es combinación lineal de no más de r elementos de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, entonces $\dim V \leq r$.

9.- Compruebe que si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ son l.ind. y si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r, \beta$ son l.d. entonces β se puede expresar de manera única como combinación lineal de

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$.

10.- Suponga $\alpha_1 \neq 0$. Demuestre que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ son l.d. si, y sólo si, existe k tal que α_k es combinación lineal de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1}$.

11.- Sea $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$ una base de V, $n \geq 2$. Será $\{\epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_2 + \epsilon_3, \ldots, \epsilon_n + \epsilon_1\}$ una base para V? Es cierto el converso?

12.- Hallar el espacio de matrices que conmutan con:

a) I_n

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) todas las matrices cuadradas.

13.- Si W_1, W_2 son subespacios no triviales de un espacio vectorial V, entonces existe $\alpha \in V$ tal que $\alpha \notin W_1$ y $\alpha \notin W_2$. Es esto cierto para más de dos subespacios?

14.- Sean W_1, W_2 subespacios de V y sea $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$. Muestre que $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ son subespacios. Bajo qué condiciones es $W_1 \cup W_2$ un subespacio de V? Cuál es el subespacio más pequenno de V que contiene a $W_1 \cup W_2$?

15.- Dar un ejemplo donde $W_1 \cap (W_2 + W_3) \neq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$, donde los W_i son subespacios de V.

16.- Compruebe que la función de volumen de un 3- paralelepípedo es una aplicación 3- lineal (en términos de los vectores que generan al paralelepípedo).

17.- Hacer una lista donde figure cada una de las $n!$ n-permutaciones exactamente una vez y tal que se pase de una a la siguiente por medio de una trasposición. Se deduce que, si $n \geq 3$, hay tantas permutaciones pares como impares.

18.- Si una de las columnas de $A \in M_{n\times n}$ es combinación lineal del resto, $|A| = 0$.

19.- La *matriz traspuesta* de A viene dada por: $A^t_{ij} = A_{ji}$. Compruebe que $(A+B)^t = A^t + B^t$, que $(AB)^t = B^t A^t$ y que el determinante no varía al trasponer la matriz. [Para esto último, utilice la formulación explícita del determinante, que hicimos para demostrar la existencia.]

21.- Utilizar el ejercicio anterior para demostrar que el determinante de una matriz antisimétrica de dimensión impar es igual a cero. [Una matriz A se dice *antisimétrica si* $A_{ij} = -Aji$].

20.- Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} = |A|$$

[de aquí se deduce la conocida fórmula del determinante en términos de los *menores*de los elementos de una fila.]

21.- Si todas las entradas de una matriz a un lado de la diagonal principal son todos nulos, entonces el determinante de la matriz es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

22.- Evaluar

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

23.- Deducir rápidamente, sin sacar una sola cuenta, por qué el siguiente determinante es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$